Pavages et recouvrements

Stéphane Vinatier

IREM de Limoges – Université de Limoges ; stephane.vinatier@unilim.fr

Les pavages sont omniprésents dans l'environnement, sur les parois de nombreuses constructions humaines ou dans les ruches des abeilles. Cet atelier s'intéresse d'abord à des recouvrements plus généraux, avec des puzzles montrant les découpages de rectangles et d'un carré en carrés tous distincts, pour lesquels on présente une activité largement utilisée avec des scolaires. On pave ensuite à l'aide de pièces en forme de « sphinx » un grand sphinx et un triangle équilatéral, en pointant les solutions qui respectent la structure (auto-similarité ou symétrie d'ordre 3). Nous détaillons ensuite un projet d'animation autour des pavages pentagonaux convexes, dont on fête cette année le centenaire de l'histoire moderne. Il consiste à faire réaliser certains de ces pavages avec le corps, après les avoir tracés sur le sol à l'aide de gabarits (à réaliser).

Mots clefs : puzzles ; découpage en carrés ; sphinx ; pavages pentagonaux

Activité n°1 : découpage en carrés

Nous décrivons ici une activité utilisée à de nombreuses occasions pour des animations avec des scolaires de différents niveaux des cycles 3 et 4. Elle s'appuie sur des puzzles – deux faciles et un difficile – présentant le découpage en carrés de tailles toutes distinctes de deux rectangles et d'un carré. En demandant aux élèves de remplir une fiche d'activité après la réalisation de chaque puzzle, on tente de leur faire prendre du recul par rapport à l'activité et de mettre en oeuvre certaines compétences mathématiques.

Les puzzles

Nous avons fait réaliser 3 puzzles par le fabricant *EFCÉ* (Magnac-Bourg) correspondant au découpage en carrés tous distincts de deux rectangles et d'un carré, respectivement en 9, 10 et 21 pièces (Fig. 1).

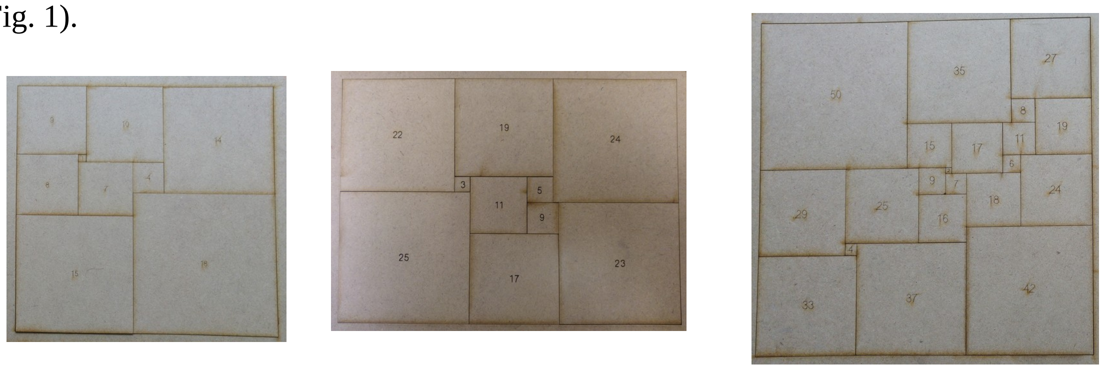


Figure 1 : les 3 puzzles « découpage en carrés distincts » (jeux *EFCÉ*)

Chaque pièce de puzzle est un carré dont la longueur du côté est indiquée au centre (sans unité et avec une échelle différente pour chaque puzzle). Les deux premiers puzzles sont faciles à compléter et permettent une bonne entrée dans l'activité. Ils ont chacun leurs avantages : celui à 9 pièces peut sembler carré à première vue, ce qu'on peut demander de vérifier en calculant les longueurs des côtés à l'aide de celles des pièces ; de plus il contient un carré de côté 1 qui peut servir d'unité pour rappeler en acte la définition de l'aire (nombre de carrés d'aire 1 contenus dans la surface). Le puzzle à 10 pièces est nettement non carré et n'a pas de pièce de côté 1 ; cependant sa complétion peut faire apparaître plus clairement la nécessité d'intervertir, dans certains cas, deux pièces qui remplissent une largeur.

Le puzzle à 21 pièces est nettement plus difficile, sa résolution peut être présentée comme un challenge pour ceux qui auront réussi les deux premiers (ou l'un des deux). La difficulté de ce défi permet de justifier la demande de mettre sur papier les stratégies élaborées pour compléter les puzzles faciles, comme détaillé ci-après.

Pour des détails sur l'étude mathématique du découpage de rectangles et carrés en carrés de tailles toutes distinctes, on peut se reporter aux ouvrages suivants listés dans les références : IREM de Poitiers (2016), ouvrage de référence sur les puzzles mathématiques, un peu concis sur cette question ; Delahaye (2014), pour un traitement plus roboratif.

Fiche d'activité

La première page de la fiche d'activité, à remplir par les élèves après la complétion d'un des deux puzzles faciles, comporte les questions suivantes :

- **Principes.** Expliquez comment vous avez réussi à compléter le puzzle : quelles idées vous ont guidés ? Qu'avez-vous deviné ? Quelles règles avez-vous découvertes ? Donnez au moins 2 réponses.
- **Dimensions.** La longueur des côtés des carrés est indiquée au milieu de chaque carré. Quelles sont les dimensions du rectangle ? Expliquez.
- **Additions.** Trouvez toutes les additions de longueurs de côtés de carrés qui donnent les dimensions du rectangle et qui sont visibles sur le puzzle. Combien y en a-t-il ?
- **Pour aller plus loin...** Calculez l'aire (c'est-à-dire la surface) du rectangle de 2 façons différentes. Expliquez.

  Indications. On pourra calculer l'aire : en utilisant une opération faisant intervenir la longueur et la largeur ; à partir des aires des carrés qui composent le puzzle.

La deuxième page de la fiche d'activité, à remplir après le puzzle à 21 pièces, reprend les trois dernières questions de la première :

- **Dimensions.** La longueur des côtés des petits carrés est indiquée au milieu de chaque carré. Quelle est la longueur du côté du grand carré ? Calculez-la de plusieurs façons différentes à l'aide du puzzle.
- **Additions.** Combien d'additions de longueurs de côtés de carrés visibles sur le puzzle donnent les dimensions du grand carré ?

- **Pour aller plus loin...** Calculez l’aire (c’est-à-dire la surface) du grand carré de 2 façons différentes. Expliquez.

Déroulement et réactions

L’activité est habituellement menée avec une demi-classe, soit une douzaine d’élèves répartis entre 3 ou 4 tables. Ils travaillent donc en groupes de 3 ou 4 élèves. Selon le temps disponible (et le nombre de puzzles de chaque type), les élèves essayent deux puzzles (un facile et celui à 21 pièces) ou font les trois. Il faut compter en général entre 1/2h et 1h.

Bien souvent, l’implication est assez hétérogène au sein des groupes, et varie selon la phase de l’activité. Dans l’ensemble la phase de complétion des puzzles est attractive, les élèves ont en particulier envie de relever le défi du puzzle à 21 pièces !

La phase de rédaction des “règles” découvertes pour compléter l’un des puzzles faciles est bien plus délicate, les élèves ont besoin d’être questionnés voire guidés vers les réponses possibles, il est souvent utile de mettre en commun les réponses des différents groupes. La rédaction elle-même semble souvent demander un effort particulier, il faut parfois faire abstraction de toute notion d’orthographe et de grammaire pour ne pas disperser les efforts : l’objectif est ici de tenter d’expliciter des raisonnements parfois peu réfléchis, avec les moyens disponibles.

La phase de calcul des dimensions n’est pas toujours aisée, il n’est pas clair pour tous les élèves que deux côtés opposés du rectangle auront la même longueur. Le puzzle permet de le vérifier. Comme dit plus haut, l’aspect quasiment carré du puzzle à 9 pièces peut être une motivation pour calculer les longueurs d’au moins deux côtés consécutifs.

La question sur les “additions” est en général un peu déconcertante pour les élèves. L’idée est de trouver plusieurs décompositions additives des longueurs des côtés, exercice qui n’est sans doute pas très habituel. Cette question peut faire prendre conscience que non seulement les côtés opposés d’un rectangle ont la même longueur mais également toutes les sections parallèles à ces côtés. Trouver toutes les décompositions additives d’une des longueurs (du moins celles qui apparaissent dans le puzzle) n’est pas évident non plus, on peut aider les élèves en faisant glisser une règle ou le bord d’une feuille parallèlement aux côtés.

Le calcul d’aire fait clairement apparaître la confusion classique entre périmètre et aire, l’idée du produit n’est pas très souvent spontanée… Comme indiqué plus haut, la présence d’un carré de côté 1 permet de lui redonner du sens : le carré de côté 4 est rempli par 4 lignes comportant chacune 4 carrés de côté 1. Pour la plupart des élèves cette interprétation de l’aire n’est pas du tout acquise, faut-il en déduire qu’elle n’a pas été suffisamment travaillée ou institutionnalisée ? La deuxième méthode, consistant à ajouter les aires de chacun des carrés composant le puzzle, est assez fastidieuse. Elle est intéressante pour vérifier concrètement la propriété d’additivité des aires. On peut autoriser la calculatrice pour éviter une surcharge cognitive, à moins de vouloir travailler spécifiquement le calcul.

La complétion du puzzle à 21 pièces est souvent difficile. Malgré l’écriture préalable de principes de complétion (souvent très basiques, comme « les grosses pièces en premier, dans les coins »), il faut souvent les rappeler aux élèves afin qu’ils les mettent en oeuvre ; il faut aussi leur suggérer des règles qu'ils n'ont pas découvertes (intervertir des pièces parmi celles qui remplissent un côté ou ne pas créer des "couloirs" impossibles à remplir vu que les carrés sont de tailles toutes distinctes). Enfin il faut guider vers ce qui semble être la seule solution au problème (Fig. 1) ; certains remplissages du bord avec les pièces parmi les plus grosses ne mènent qu'à des impasses, ce dont il est difficile de se convaincre et peut s'avérer assez frustrant. Certains élèves cependant veulent relever le défi seuls et ne souhaitent pas recevoir d'indications, leur motivation leur permet souvent d'arriver à la solution… sans toujours savoir comment : il est alors intéressant de défaire le puzzle et de les confronter à nouveau au problème qu'ils viennent de résoudre pour leur faire prendre conscience de la part de hasard ou d'intuition non explicitée qui leur a permis d'y arriver.

Activité n°2 : sphinx

On présente maintenant deux pavages réalisés avec la même pièce : le sphinx, pentagone concave qui a l'allure du Sphinx de Gizeh en Égypte. Là encore on dispose de puzzles réalisés par le fabricant *EFCÉ*, l'un lui aussi en forme de sphinx (à remplir à l'aide de 16 pièces), l'autre en forme de triangle équilatéral (24 pièces). Ces puzzles ont été utilisés en animation tout public, avec une certaine autonomie laissée aux participants.

Chacun des puzzles a de nombreuses solutions. Il est à noter qu'il faut s'autoriser la possibilité de retourner des pièces (en nombre variable selon les solutions), ce qui revient sur le papier à appliquer à la forme de base une symétrie axiale, qui modifie son orientation, pour peu qu'on donne un sens à ce terme. Selon les contextes, le terme « pavage » autorise ou non ce retournement, c'est pourquoi il est utile de le préciser ici.

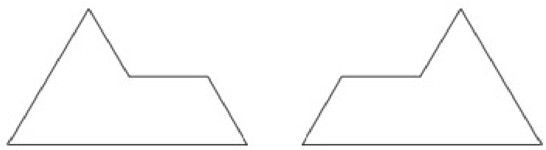
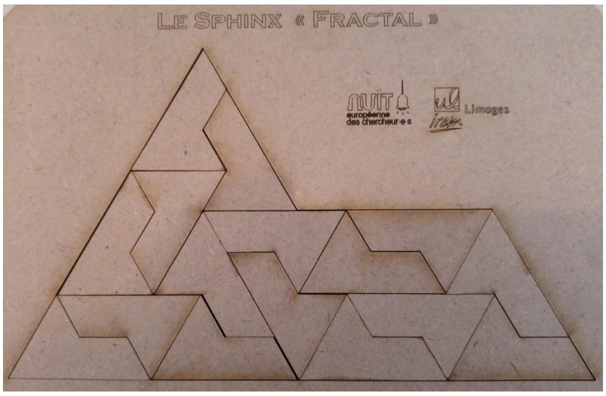


Figure 2 : sphinx dans les deux orientations possbles

Des solutions « symétriques »

Il peut être souhaitable de laisser les participants chercher une solution sans indication ni contrainte. Cependant, dans le but de les aiguiller ou de leur donner une tâche supplémentaire à accomplir, selon les cas, et de leur proposer un contenu mathématique plus riche, on peut mettre en avant deux solutions particulières (une pour chaque puzzle), celles qui respectent les symétries des puzzles eux-mêmes. Dans le cas du triangle équilatéral, on peut en effet trouver un remplissage invariant par "symétrie d'ordre 3" (rotation d'angle de mesure 120°) ; il en existe d'ailleurs plusieurs. Dans le cas du grand sphinx, on peut trouver un remplissage « fractal » dans lequel les 16 petits sphinx sont regroupés en plusieurs sphinx identiques de taille moyenne, lesquels remplissent le grand de la même façon qu'ils sont remplis par les petits. Cette propriété d'invariance de forme ou d'organisation à des échelles de taille différentes s'appelle l'auto-similarité. Un objet qui la possède est dit fractal.

L'auto-similarité peut être utilisée pour calculer le nombre N de petits sphinx qui composent chaque sphinx de taille moyenne : puisque les petits sont disposés dans les moyens comme les moyens le sont dans le grand, il faudra le même nombre N de sphinx moyens pour remplir le puzzle. Cela fait au total N^2 petits sphinx pour remplir le puzzle à 16 pièces, d'où $N^2 = 16$ et $N = 4$. Ce problème a la particularité de donner un sens concret à la racine carrée, en tant que quantité, ce qui n'est pas si fréquent ! Il est à noter qu'en animation, le public fait très rarement ce raisonnement, même si on tente de le pousser dans cette voie. Pourtant savoir *a priori* qu'il faut 4 petits sphinx pour en faire un moyen (et que les moyens sont disposés dans le grand comme les petits dans un moyen) est d'une grande aide pour arriver à la solution fractale.



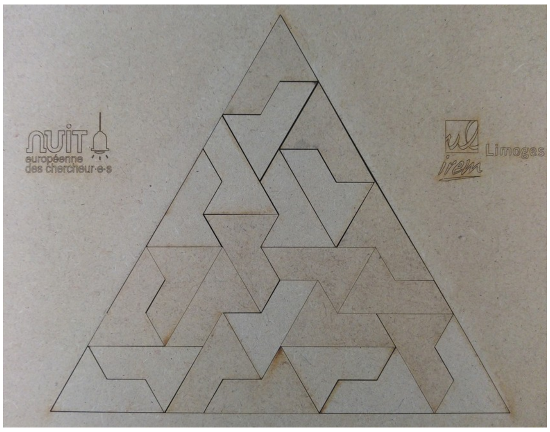


Figure 3 : sphinx fractal et sphinx équilatéral à symétrie d'ordre 3 (jeux *EFCÉ*)

On peut observer sur la Figure 3 la présence de pièces avec chacune des deux orientations dans chaque puzzle. Dans le cas fractal, l'orientation du sphinx change à chaque échelle de taille et chaque sphinx moyen contient 1 petit de même orientation et 3 d'orientation contraire.

Pavages du plan

À partir des puzzles ci-dessus, on peut obtenir des pavages du plan (infini) tout entier. Il est bien connu en effet qu'on peut paver le plan avec un triangle, en réunissant celui-ci avec son symétrique par rapport au milieu d'un de ses côtés pour former un parallélogramme, qui constituera une période du pavage, c'est-à-dire le motif qui donne celui-ci par translations dans deux directions (celles des côtés du parallélogramme). Ce procédé fonctionne aussi bien si le triangle de départ est rempli de sphinx (disposés de façon symétrique ou non) et donne donc un pavage périodique du plan par des sphinx, une période étant maintenant constituée des 48 sphinx contenus dans deux triangles attenants.

Avec le puzzle en forme de sphinx, on peut aussi produire un pavage périodique du plan en assemblant deux grands sphinx de la même façon que sont assemblés les deux petits sphinx du coin en bas à gauche de chacun des puzzles de la Figure 3, pour former un parallélogramme auquel on applique ensuite des translations dans chacune des directions de ses côtés pour produire le pavage.

Il est cependant bien plus intéressant de fabriquer un pavage fractal du plan en itérant la construction montrée ci-dessus à des échelles de plus en plus grandes : avec 4 grands sphinx, on en crée un de taille supérieure, puis avec 4 de cette taille un encore plus grand,… et ainsi jusqu'à l'infini ! Il est possible de montrer que le pavage obtenu n'est pas périodique : on ne pourra pas y trouver un motif qui, en se répetant à l'identique dans deux directions, permettrait de reconstituer le pavage. L'auteur ne connaît pas d'argument simple pour justifier cette affirmation, la nature fractale du pavage pourrait-elle être utilisée ? On pourra noter que le site de référence sur les pavages de l'université de Bielefeld indique qu'il n'est pas facile de montrer que ce pavage est limite-périodique[1], c'est-à-dire non périodique et union dénombrable de motifs périodiques. La page citée en note donne une belle image du pavage fractal obtenu, en faisant ressortir les deux orientations des sphinx de base.

Activité n°3 : pavages pentagonaux convexes

On décrit maintenant un projet d'activité autour des pavages pentagonaux convexes, dont 2018 marque le centenaire de l'histoire de l'étude mathématique. Avant de résumer cette histoire, rappelons que tous les triangles et tous les quadrilatères (y compris concaves, Figure 4) pavent le plan ; que les seuls polygones réguliers convexes pavant le plan sont le triangle, le carré et l'hexagone ; qu'il existe 3 types d'hexagones pavant le plus et qu'aucun polygone convexe à strictement plus de 6 côtés ne le pave (voir les références citées en fin d'article, notamment Delahaye 2013 et Rao 2018).

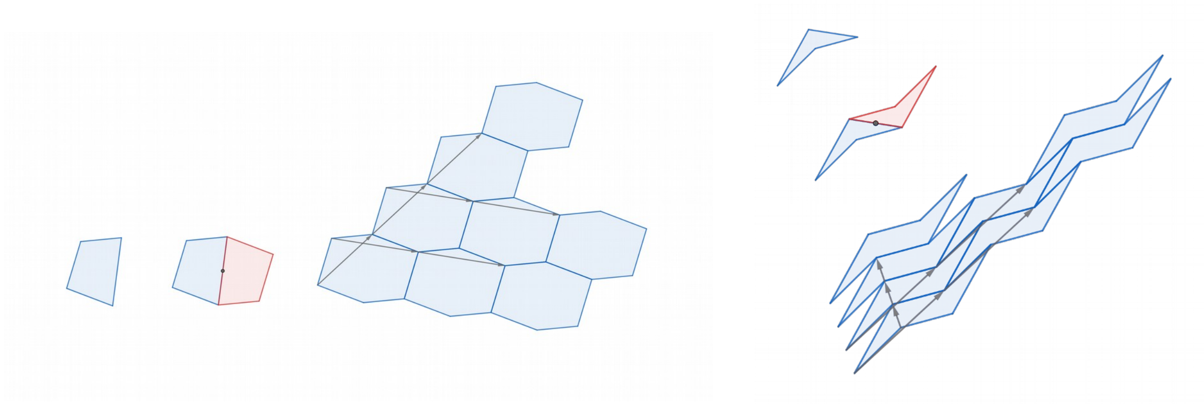


Figure 4 : paver le plan avec un quadrilatère convexe ou non

Une histoire d'un siècle

Pour les pentagones convexes la première étude mathématique remonte à la thèse de doctorat de Karl Reinhardt à l'université de Francfort en 1918 : il liste 5 « types » de pentagones convexes pavant le plan, définis par des conditions comme (voir Figure 5) :

- la somme des mesures de trois angles consécutifs vaut 360° (c'est-à-dire deux côtés sont parallèles !) – type 1 ;

[1]http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/sphinx/

- la somme des mesures de trois angles non consécutifs vaut 360° et deux côtés (bien choisis) sont de même longueur – type 2 ;
- deux angles droits et les côtés formant chacun d'eux de même longueur – type 4.

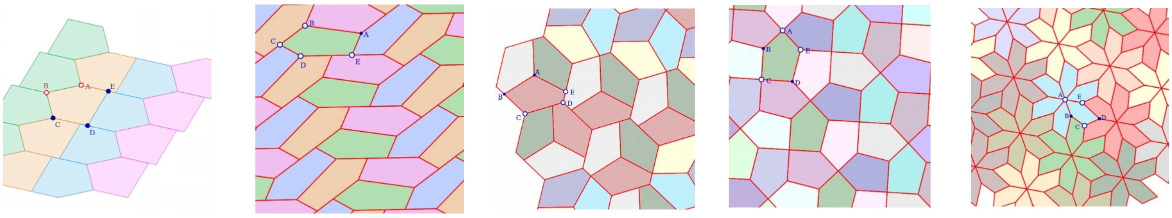


Figure 5 : les 5 types de Reinhardt (dessins Yves Martin, IREM de La Réunion, avec DGPaD)

Même si Reinhardt travaille à répondre à l'un des problèmes posés par Hilbert au début du XXe siècle, il est intéressant de constater que l'entreprise allemande Villeroy & Boch a créé un carrelage de carreau pentagonal (motif appartenant au type 4, connu aujourd'hui sous le nom de « pavage du Caire »), qui a été utilisé pour paver l'entrée du Music Hall de Hambourg, construit au début du XXe siècle[2]. On ne sait si Reinhardt avait fréquenté ce lieu. Il semble en tout cas qu'il ait cru que sa liste était complète… ainsi que beaucoup d'autres après lui puisqu'il faut attendre 1968 pour qu'un mathématicien de l'université de Baltimore, Richard Kershner, reprenne son étude… et trouve trois nouveaux types, oubliés par Reinhardt ! Kershner sera plus explicite et affirmatif sur le fait que sa liste est complète, puisqu'il écrira en avoir la preuve, mais ne pas disposer d'assez de place pour la publier.

Cette découverte sur un sujet relativement facile à expliquer fait du bruit en dehors du milieu mathématique via le magazine de vulgarisation scientifique *Scientific American* qui la relate au milieu des années 70, provoquant des recherches passionnées chez certains lecteurs… non sans succès : deux d'entre eux, l'informaticien Richard James et la mère au foyer Marjorie Rice, découvrent respectivement un et quatre nouveaux types ! Ou quand des amateurs mettent en défaut la rigueur du professionnel…

En 1985 un mathématicien de l'université de Dortmund, Rolf Stein, découvre un 14e type et propose une nouvelle preuve d'exhaustivité… qui se révèle bientôt fausse (il avait eu du moins l'honnêteté de la publier, la soumettant ainsi à l'analyse de ses collègues). Cependant il devient vraiment difficile de faire progresser la liste et ce n'est que trente ans plus tard en 2015 qu'une équipe menée par Casey Mann à l'université de Washington peut exhiber un 15e type à l'aide d'un programme d'ordinateur. Michaël Rao, de l'université de Lyon, entre alors dans le jeu et met un point un programme susceptible de décrire tous les types, après une première phase de restriction théorique des possibilités (infinies donc inaccessibles à l'ordinateur *a priori*). Il espère à la fois découvrir un nouveau type et boucler la liste, finalement son programme révèle qu'elle est déjà complète ! Proposée pour publication en 2017, sa preuve, pas encore publiée début 2019, a été validée (du moins la partie la plus essentielle) par un des experts du domaine. Un siècle ou presque après la thèse de Reinhardt, ce résultat termine la longue et tumultueuse histoire de cette recherche.

[2]http://www.tess-elation.co.uk/cairo-tiling/foreign-cairos

Jouer avec les pavages pentagonaux convexes ??

Pour célébrer ce centenaire, le fabricant *EFCÉ*, partenaire de l'IREM, a créé un double coffret de 15 puzzles illustrant chacun des 15 types de pentagones convexes pavant le plan. Il a suggéré à l'IREM de Limoges de consacrer son atelier à la Fête de la Science 2018 à ce thème. Un pentagone convexe pouvant être réalisé avec le corps humain (la tête, les deux mains et les deux pieds pour figurer les cinq sommets), l'idée s'est dégagée de réaliser des pavages avec le corps, mais les modalités de mise en oeuvre sont longtemps restées floues… Finalement on a choisi de découper des pentagones de type 3 et 4 dans deux grands rouleaux de revêtement vinyle pour les sols, à charge pour les groupes d'élèves participant de les assembler (par type) pour retrouver chacun des deux pavages correspondants, puis de s'installer sur les pavés pour les réaliser avec le corps. Cette activité aura eu un beau succès avec les scolaires (surtout cycle 3) visitant la Fête de la Science, tandis que les puzzles se sont révélés bien adaptés à l'accueil du grand public.

Figure 6 : le double coffret *EFCÉ* et deux groupes « pavant avec le corps » (type 4)

Références

Delahaye, J.-P. (2013). Les pavages pentagonaux : une classification qui s'améliore. *Pour la Science*, n° 432, 78-83.

Delahaye, J.-P. (2014), *Mathématiques pour le plaisir. Un inventaire de curiosités*, Belin – Pour la Science : Paris.

IREM de Poitiers (2016), *Maths et puzzles. Créez des maths de toutes pièces !*, APMEP et ACL - Les éditions du Kangourou : Paris

Rao, M. (2018). L'énigme des pentagones résolue. *La Recherche*, 533, 62-66. [en ligne]

Wolchover, N. (2017). Pentagon tiling proof solves century-old math problem. *Quantamagazine* [en ligne]

Wolchover, N. (2017). Marjorie Rice's secret pentagons. *Quantamagazine* [en ligne]